

# Cifrado Homomorfico

Cuando un tercero tiene que operar con nuestros datos y no queremos que los vea, se aplica cifrado homomorfico, que permite realizar operaciones sobre datos cifrados.

A la hora de operar con cifrado homomorfico se usan los siguientes componentes:

- **n** → Tamaño de los vectores
- **q** → Valor del módulo (módulo q)
  - Trabajamos con módulos en potencias de 2 ( $2^x$ )
- **e** → Error
  - Distribución normal  $N(0, \gamma * q) \rightarrow r = \gamma * q$ 
    - Media 0
    - Valor relacionado con q
    - El valor debe estar redondeado
    - Valor entre 0 y q
- **a** → Vector de soporte
  - Vector de tamaño n con valores entre 0 y q-1
- **S** → Secreto o clave privada
  - Solo la conoce el dueño de los datos a operar
  - Valores aleatorios del conjunto  $\{-1, 0, 1\}$

Sabiendo esto, sabemos que la clave pública (a,b) del cifrado homomorfico es:

$$(a, b = S^T * a + e \pmod q) \in \mathbb{Z}^n_q * \mathbb{Z}_q$$

Esta fórmula es solo la clave pública, si queremos proceder a realizar el cifrado utilizando esta, debemos introducir otros 2 elementos:

- **m** → Mensaje a Cifrar
- **Δ** → Constante (Normalmente su valor es una potencia de 2)

El cifrado homomórfico se vería de la siguiente forma:

$$(a, b = S^T * a + e + \Delta * m \pmod q)$$

- Clave pública →  $S^T * a + e$
- Texto Cifrado →  $b = S^T * a + e + \Delta * m \pmod q$
- **OJO**: a y b son necesarios para poder descifrar el mensaje

Cuando se mandan datos a un tercero para operar con ellos, se mandan a y b

$$\Delta * m + e = b + S^T * a$$

- $m' = \Delta * m + e$  → Mensaje aproximado con error

$$m + e = (b + S^T * a) / \Delta \pmod q$$

- $m' = m + e$

$$m = \lfloor (b + S^T * a) / \Delta - e \pmod q \rfloor$$

- Redondeamos el resultado para el descifrado
- Si todo va bien, al realizar el redondeo desaparece el error aplicado y el valor final obtenido es el mensaje inicial.

### Ejemplo de Cifrado Homomórfico

#### DATOS

$n = 2$   
 $q = 4 = 2^2$   
 $\Delta = 1 = 2^0$   
 $e = 0$  (no hay error)  
 $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   
 $m = 1$

#### Cifrado

$$(a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b = S^T * a + e + \Delta * m) \pmod q$$

$$b = (1 \ 0) * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 + 1 * 1$$

$$b = 2 + 0 + 0 + 1 * 1 = 3$$

$$b = 3$$

#### Descifrado

$$(a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b = 3)$$

$$m' = \frac{b - S^T * a - e}{\Delta} \pmod q$$

$$m' = \frac{3 - (1 \ 0) * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 0}{1} \pmod 4$$

$$m' = \frac{3 - 2}{1} \pmod 4$$

$$m = 1$$

## Sumas sobre cifrado Homomórfico

### Ejemplo de suma con cifrado homomórfico

#### Datos

$n = 2$   
 $q = 4 = 2^2$   
 $\Delta = 1 = 2^0$   
 $e = 0$   
 $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $m_1 = 1$   
 $m_2 = 2$   
 $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   
 $a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$(a_1, b_1 = S^T * a_1 + e_1 + \Delta * m_1 \pmod q)$$

$$(a_2, b_2 = S^T * a_2 + e_2 + \Delta * m_2 \pmod q)$$

$$m_1 = \frac{b_1 - S^T * a_1 - e_1}{\Delta}$$

$$m_2 = \frac{b_2 - S^T * a_2 - e_2}{\Delta}$$

$$m_1 + m_2 = \frac{b_1 - S^T * a_1 - e_1}{\Delta} + \frac{b_2 - S^T * a_2 - e_2}{\Delta} =$$

$$= \frac{b_+ - S^T * (a_1 + a_2) - e_+}{\Delta} \pmod q$$

$$(a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b_1 = 3)$$

$$(a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = 1)$$

$$m_1 + m_2 = (a_+ = a_1 + a_2, b_+ = b_1 + b_2) \pmod q =$$

$$= (a_+ = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, b_+ = 3 + 1) \pmod 4 =$$

$$= (a_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_+ = 0)$$

$$\hat{m}_+ = \frac{b_+ - S^T * a_+ - e_+}{\Delta} \pmod q = \frac{0 - (1 \ 0) * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0}{1} \pmod 4 = -1/1 \pmod 4 = 3$$

$$m_1 + m_2 = \hat{m}_+ = 3$$

# Multiplicación de cifrado homomórfico contra una pequeña constante

**Multiplicación por una constante pequeña con homomórfico**

$$b = S^T * a + e + \Delta * m \pmod q$$

↓

$$\hat{m} = \frac{b - S^T * a - e}{\Delta} \pmod q$$

$$c * \hat{m} = c * \left( \frac{b - S^T * a - e}{\Delta} \right) \pmod q =$$

$$= \frac{\overbrace{c * b}^{b*} - \overbrace{c * S^T * a}^{a*} - \overbrace{c * e}^{e*}}{\Delta} \pmod q$$

↓

$$(a* = a * c, b* = b * c) \pmod q$$

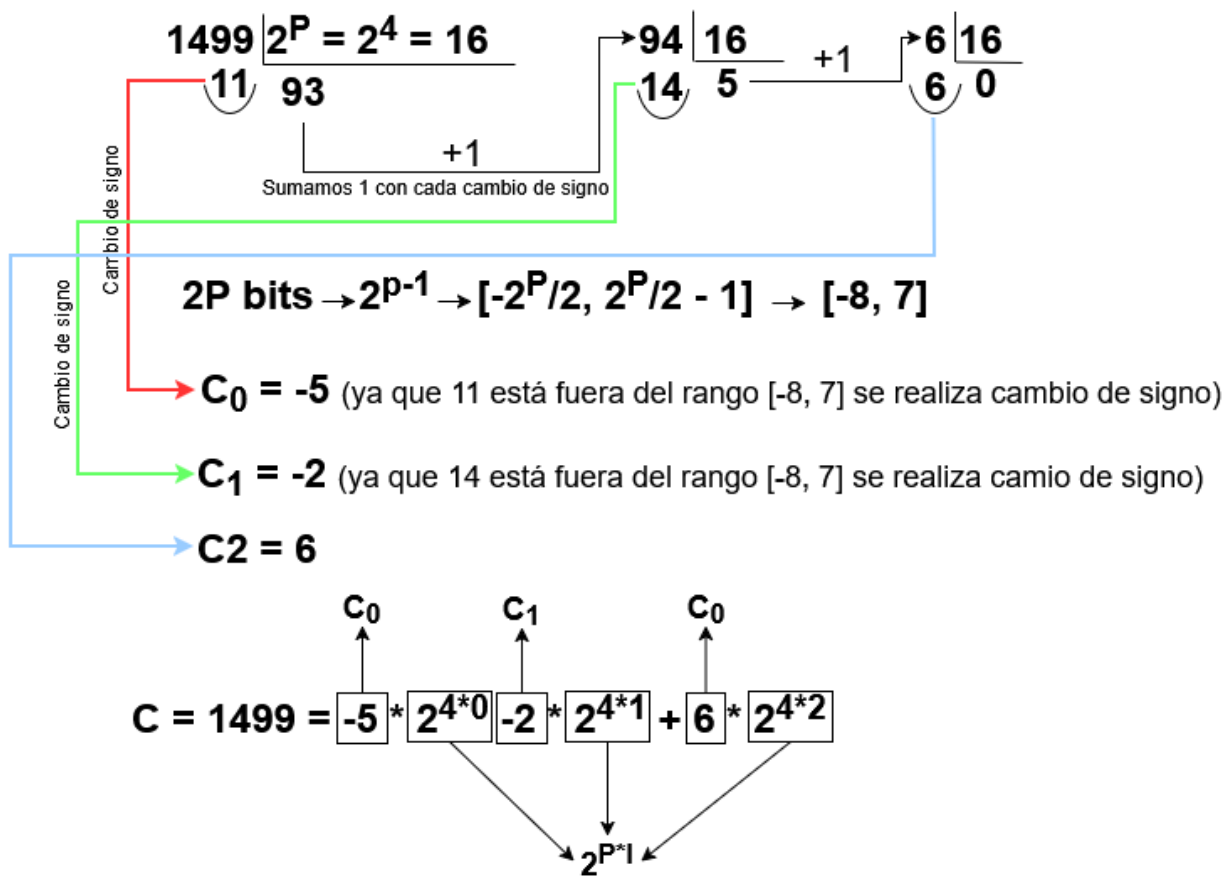
**NOTA:** Si el valor de C es muy grande puede descuadrarse todo al multiplicarse el error.

## Descomposición gadget

La descomposición gadget consiste en tomar un número grande y descomponerlo en bloques. Esto se usa en las multiplicaciones con cifrado homomórfico para evitar que se descuadren los valores.



### Ejemplo de Descomposición Gadget: Para $C = 1499$ , $B = 3$ y $P = 4$



### Descomposición Gadget en el Cifrado Homomórfico

Gracias a la descomposición gadget podemos descomponer una multiplicación homomórfica por una constante muy grande de la siguiente forma para  $(a*c, b*c)$ :

- $(a*c_0, b*c_0)$
- $(a*c_1, b*c_1)$
- $(a*c_2, b*c_2)$

Lo que reduce el error de forma considerable

$$C = C_2 * 2^{\{P*2\}} + C_1 * 2^{\{P*1\}} + C_0 * 2^{\{P*0\}}$$

Para ello, se crean varios mensajes cifrados:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= m * 2^{P*2} \\ m_2 &= m * 2^{P*1} \\ m_3 &= m * 2^{P*0} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \begin{cases} (a*c^0, b_{m1} * c_0) \\ (a*c^1, b_{m2} * c_1) \\ (a*c^2, b_{m3} * c_2) \end{cases}$$

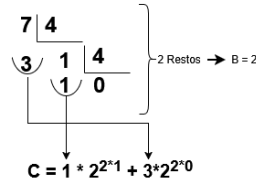
**Ejemplo de aplicación de descomposición Gadget a Multiplicaciones con Cifrado Homomorfo**

**DATOS**

$S = \binom{6}{3}$   
 $n = 2$   
 $m = 2$   
 $q = 2^4 = 16$   
 $c = 7$   
 $\Delta = 2^0 = 1$   
 $P = 2$   
 $e = 0$   
 $P = 4$

**1. Aplicamos Descomposición Gadget a C**

2P bits  $\rightarrow 2^{P-1} \rightarrow [-2^{P/2}, 2^{P/2} - 1] \rightarrow [-8, 7]$



**2. Realizamos 2 cifrados**

Descomponemos en 2 bloques y realizamos el cifrado

$\times 3 \rightarrow 2^{2*0} \rightarrow (a = \binom{3}{3}, b = 2 + 0 + 0 + 1 + 2 * 2^{2*0} = 4) \rightarrow m_1 = 4$

$\times 1 \rightarrow 2^{2*1} \rightarrow (a = \binom{3}{3}, b = 3 + 0 + 0 + 1 + 2 * 2^{2*1} = 11) \rightarrow m_2 = 11$

$m_2 = -5$   
Fuera de rango [-8,7]  
Cambiamos Signo

**3. Multiplicamos los cifrados resultantes y los sumamos**

$3 * (a = \binom{3}{3}, b = 12) \Rightarrow (a = \binom{6}{3}, b = 12) \Rightarrow (a = \binom{6}{7}, b = -4)$   
Fuera de rango [-8,7]  
Cambiamos Signo

$1 * (a = \binom{3}{3}, b = -5) \Rightarrow (a = \binom{3}{3}, b = -5)$

$\xrightarrow{\text{Sumamos}} (a_+ = \binom{7}{3}, b_+ = 7)$

Así se obtiene el resultado de la multiplicación cifrado reduciendo considerablemente el error

From:

<https://www.knoppia.net/> - Knoppia

Permanent link:

[https://www.knoppia.net/doku.php?id=pan:cifrado\\_homomorfo\\_v2](https://www.knoppia.net/doku.php?id=pan:cifrado_homomorfo_v2)

Last update: 2025/12/31 16:36

