Cifrado Homomorfico

Cuando un tercero tiene que operar con nuestros datos y no queremos que los vea, se aplica cifrado homomorfico, que permite realizar operaciones sobre datos cifrados.

A la hora de operar con cifrado homomorfico se usan los siguientes componentes:

- **n** → Tamaño de los vectores
- **q** → Valor del módulo (módulo q)
    - Trabajamos con módulos en potencias de 2 (2^x)
- **e** → Error
    - Dsitribución normal N(0,γ*q) → r = γ*q
        - Media 0
        - Valor relacionado con q
        - El valor debe estar redondeado
        - Valor entre 0 y q
- **a** → Vector de soporte
    - Vector de tamaño n con valores entre 0 y q-1
- **S** → Secreto o clave privada
    - Solo la conoce el dueño de los datos a operar
    - Valores aleatorios del conjunto {-1,0,1}

Sabiendo esto, sabemos que la clave pública (a,b) del cifrado homomorfico es:

```
$(a,b = S^T*a+e $ $MOD q) ∈ Z^n_q * Z_q$
```

Esta fórmula es solo la clave pública, si queremos proceder a realizar el cifrado utilizando esta, debemos introducir otros 2 elementos:

- **m** → Mensaje a Cifrar
- **Δ** → Constante (Normalmente su valor es una potencia de 2)

El cifrado homomórfico se vería de la siguiente forma:

```
$(a,b = S^T*a+e+Δ*m $ $MOD q)$
```

- Clave pública → S^T*a+e
- Texto Cifrado → $b = S^T*a+e+Δ*m $ $MOD q$
- **OJO**: a y b son necesarios para poder descrifrar el mensaje

Cuando se mandan datos a un tercero para operar con ellos, se madan a y b

```
$Δ*m+e = b+S^T*a$
```

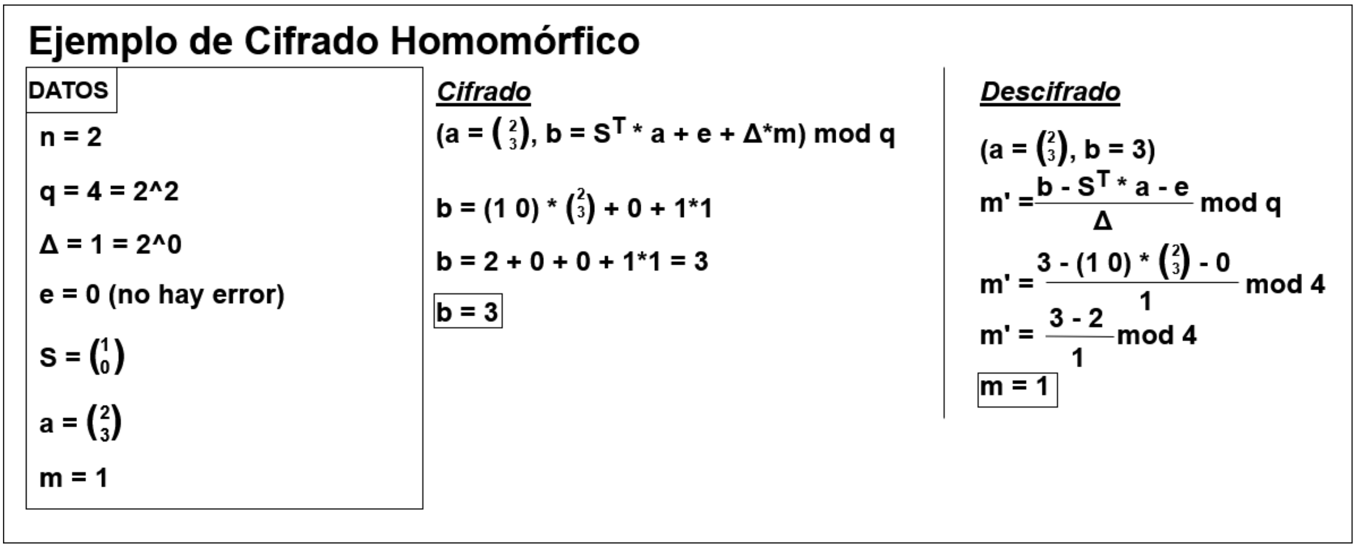
- $m' = Δ*m+e$ → Mensaje aproximado con error

```
$m+e = (b+S^T*a)/Δ$ $MOD q$
```

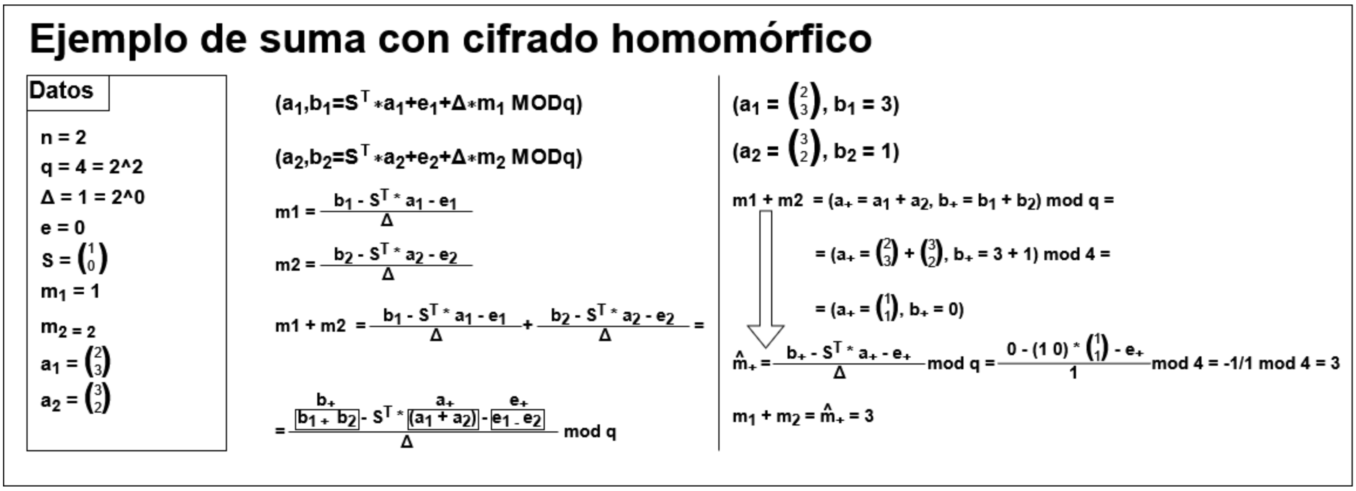
- $m' = m+e$

```
$m = ||(b+S^T*a)/Δ - e$ $MOD q||$
```

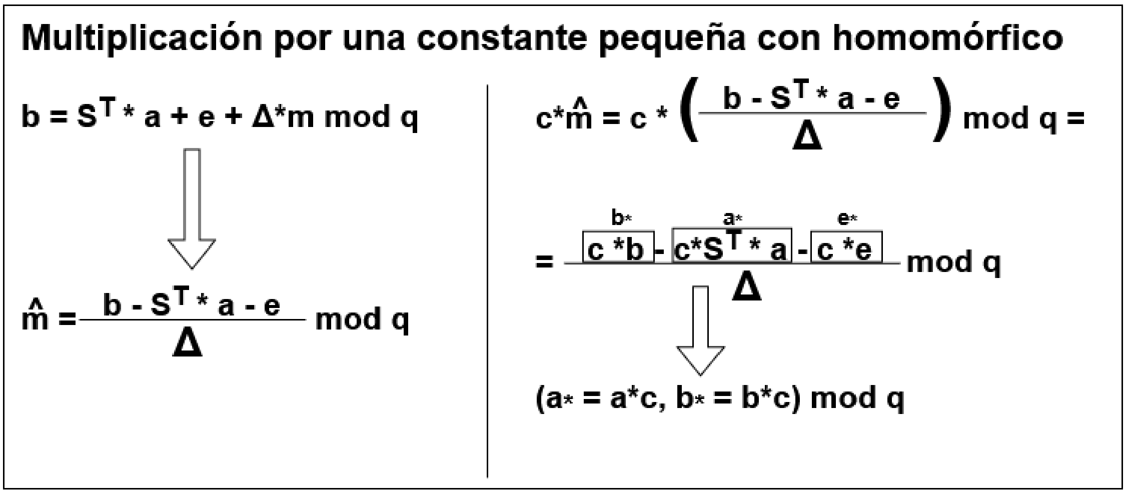
- Redondeamos el resultado para el descifrado
- Si todo va bien, al realizar el redondeo desaparece el error aplicado y el valor final obtenido es el mensaje inicial.



Sumas sobre cifrado Homomórfico



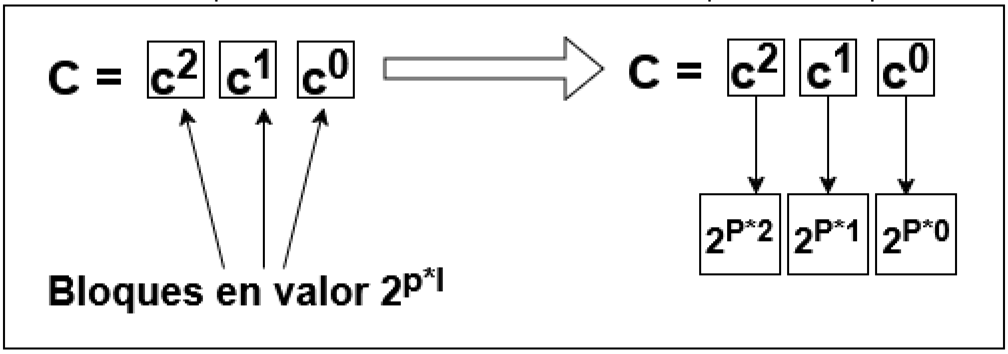
Multiplicación de cifrado homomórfico contra una pequeña constante



NOTA: Si el valor de C es muy grande puede descuadrarse todo al multiplicarse el error.

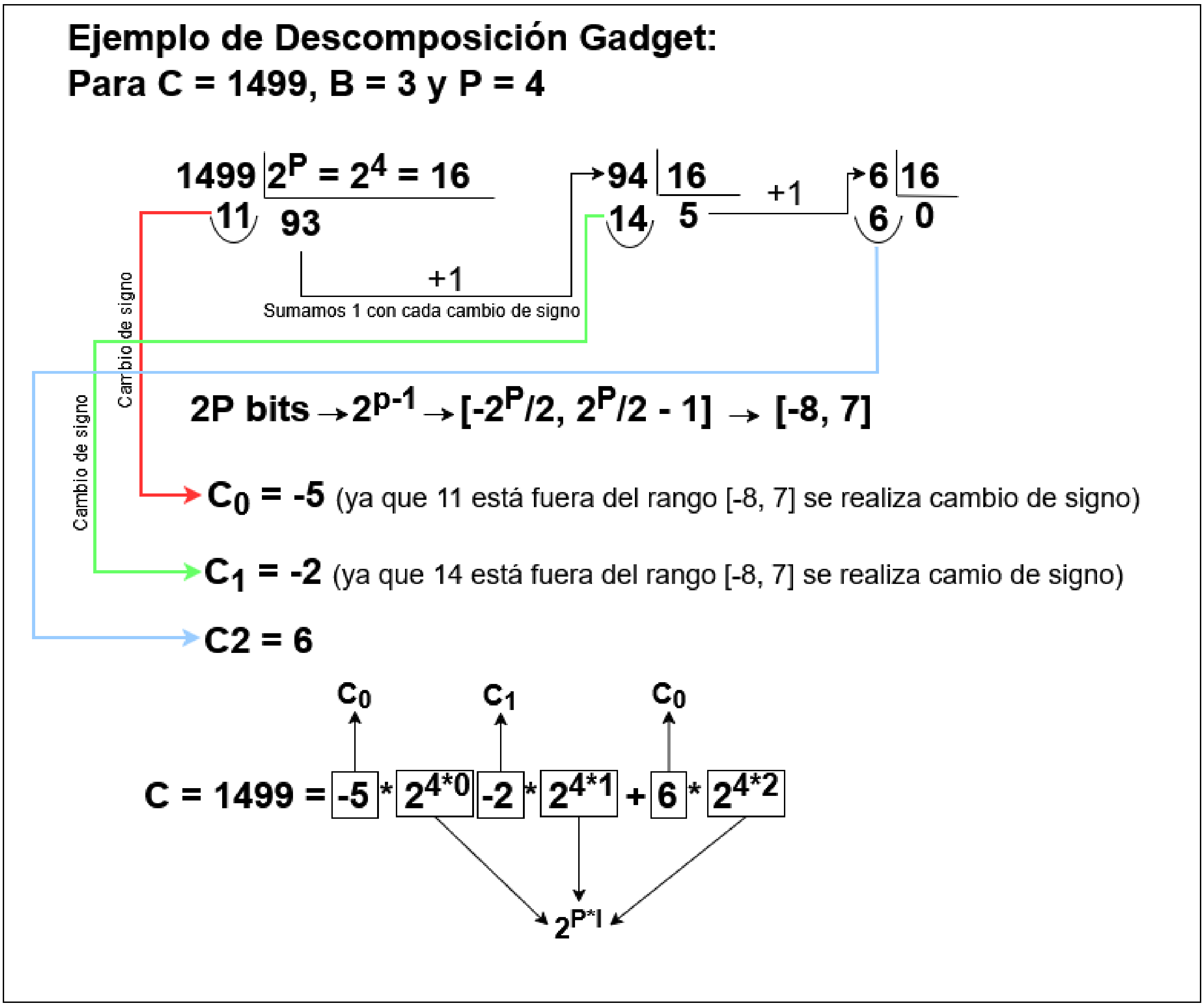
Descomposición gadget

La descomposición gadget consiste en tomar un número grande y descomponerlo en bloques. Esto se usa en las multiplicaciones con cifrado homomórfico para evitar que se descuadren los valores.



La descomposición gadget permite calcular varios factores de la constante C. Se tienen en cuenta los siguientes datos:

- C: Constante a descomponer
- B: En cuantos trozos se va a descomponer, normalmente equivale al número de restos que obtenemos.
- P: Valor de la potencia de 2 que se va a utilizar para realizar las divisiones.



Descomposición Gadget en el Cifrado Homomórfico

Gracias a la descomposición gadget podemos descomponer una multiplicación homomórfica por una constante muy grande de la siguiente forma para $(a*c, b*c)$:

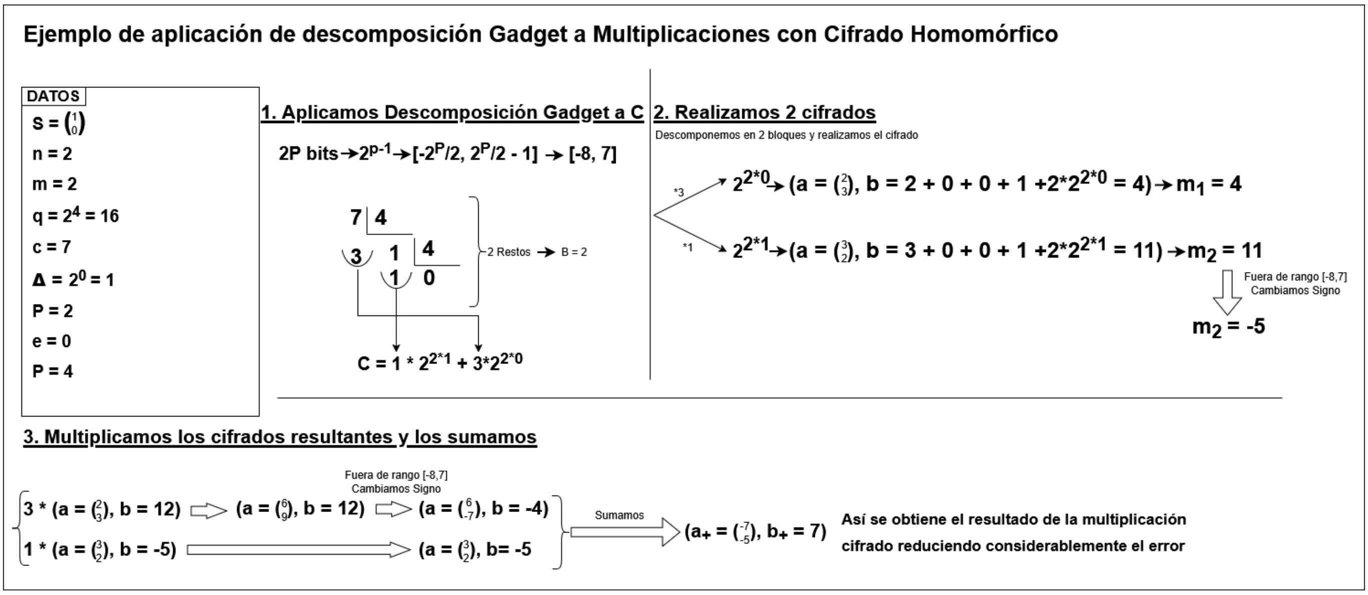
- $(a*c_0, b*c_0)$
- $(a*c_1, b*c_1)$
- $(a*c_2, b*c_2)$

Lo que reduce el error de forma considerable

```
$C = C_2*2^{P*2} + C_1*2^{P*1} + C_0*2^{P*0}$
```

Para ello, se crean varios mensajes cifrados:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = m * 2^{P*2} \\ m_2 = m * 2^{P*1} \\ m_3 = m * 2^{P*0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a*c^0,\ b_{m1} * c_0) \\ (a*c^1,\ b_{m2} * c_1) \\ (a*c^2,\ b_{m3} * c_2) \end{array}\right.$$



From:
https://www.knoppia.net/ - **Knoppia**

Permanent link:
https://www.knoppia.net/doku.php?id=pan:cifrado_homomorfico_v2

Last update: **2025/12/31 16:36**